

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ASTRA”

Etapa locală, 07.02.2026

Filiera teoretică – Științe ale naturii

Clasa a XII-a

1. Determinați:

a) (10p) $\int \frac{x}{1+x+e^x} dx, x \in (0, \infty);$

b) (15p) $\int \frac{1}{x^3+x^7} dx, x \in (0, \infty).$

2. Pe mulțimea $(0,1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$ și funcția

$$f: (0, \infty) \rightarrow (0, 1), f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

a) (10p) Demonstrați că pentru oricare numere reale $x, y \in (0, \infty)$, avem $f(x) * f(y) = f(xy)$.

b) (15p) Determinați numărul real $t \in (0, 1)$ pentru care $t * t * t = \frac{8}{9}$.

3. Un producător de articole vestimentare realizează săptămânal x articole. Profitul săptămânal este descris de funcția $P(x)$ care verifică relația $P'(x) = 30 - 2x$.

a) (10p) Determinați expresia funcției $P(x)$ știind că $P(10) = 250$.

b) (10p) Determinați valoarea maximă a profitului săptămânal știind că $P(10) = 250$.

4. (20p) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{2}}, & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{x}{1+\sqrt{x}}, & x \in [1, \infty) \end{cases}$. Calculați $\int_0^4 f(x) dx$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 10 puncte din oficiu

Timp efectiv de lucru: 3 ore.